# عمر الخيام, رينيه ديكارت و حلول المعادلات الجبرية

**K.V. Mardia**

k.v.mardia@leeds.ac.uk

**19 November 1999**[1]

**Arabic Translation:**

**Ammar Zerouk**

ammarzerouk@gmail.com

**29 September 2013**

## ملخص

يعتبر عمر الخيّام الشخص الوحيد الذي يُذكر بكونه شاعراً عظيماً وعالم رياضياتٍ عظيم. سنقوم في هذه الدراسة بعرض أعمال عمر الخيام في القرن الثاني عشر الميلادي في مجال حل المعادلات الجبرية وكيف أثرت أعماله على رينيه ديكارت في القرن السابع عشر الميلادي. على وجه الخصوص, سنقوم بمناقشة حلوله للمعادلات التكعيبية؛ تلك المعادلات التي شغلت بال الرياضيين من القرن التاسع إلى القرن السادس عشر الميلادي. ساهم عمر مساهمة كبيرة في إيجاد الجذر الموجب من خلال المناقشة الهندسية، مبشراً بالهندسة التحليلية لديكارت. سنقوم بعرض خلفية تمهيدية للمعادلات لغير الرياضيين ونقوم بوصف تصنيف الخيّام للمعادلات التكعيبية. وسيتم لاحقاً وصف طريقته في حل هذه المعادلات. كما سنشير إلى الاهتمام المستمر بأعماله خصوصاً من قبل نادي عمر الخيام في لندن.[2]

## مقدمة

من النادر جداً تذكر شخص لأعمال الشعرية والرياضية في آن. عمر الخيام هو الشخص الوحيد الذي عرف كشاعر عظيم و كرياضي عظيم. على سبيل المثال، جورج بول, جميس كلارك ماكسويل و غيرهم كتبوا شعراً لكنهم غير معروفين بأعمالهم الشعرية, بينما كان الشاعر هنري وردورث لونغفيلو هاوياً للرياضيات.

---

[1] Paper presented to Omar Khayyam Club, London.

[2] Abstract appeared in "International Congress in Commemorating Hakim Omar Khayyam Neyshabuouri" (900th death anniversary), Neyshabour, Iran, 17-19 May 2000.

نصف هنا مجهود عمر الخيام في القرن الثاني عشر لحل المعادلات الجبرية (التكعيبية على وجه الخصوص) وكيف أثرت أعمال على رينيه ديكارت لاحقاً. في الحقيقة, ديكارت الذي عالماً دينياً و reactor of university o Utrecht, اتهم بكونه ملحداً, من جهة أخرى لم يعش عمر الخيام حياة سهلة, فقد عانى الكثير من الاضطهاد بسبب أفكاره (Kasir, 1931,p.3).

## الخلفية

سنقوم هنا بمناقشة حل للمعادلات التكعيبية, هذه المعادلات التي شغلت بال الرياضيين بين القرنين التاسع و السادس عشر الميلادي, حيث أوجد العالمان الإيطاليان كاردانو و تارتاليا حلاً كاملاً في القرن السادس عشر الميلادي. من ناحية أخرى قام عمر الخيام بمساهمة كبيرة في إيجاد الجذور الموجبة من خلال حججه الهندسية, بطريقة لم تكن معروفة حتى القرن السابع عشر الميلادي حين أوجد ديكارت علاقة بين الهندسة و علم الجبر, وهكذا يكون عمر قد بشر بالهندسة التحليلية الديكارتية.

حقيقة كان ديكارت مهتماً أيضاً في حل المعادلات كذلك، وطرق ديكارت شبيهة بطرق عمر إلا أن ديكارت لاحظ بأن بعض نقاط التقاطع تمثل حلولاً للجذور التخيلية (Katz, 1998, p.448) و هكذا أوجد حلاً كاملاً للجذور الموجبة و السالبة والعقدية.

يذكر أن أعمال عمر بالنسبة للمعادلات من المراتب الأعلى من ثلاثة كانت محدودة جداً (Kasir 1931, p.34)

## تمهيد

**الجبر:** اكتشاف خواص الأعداد والكميات باستخدام الرموز العامة وهي مشتقة من كلمة "جبر" بالعربية وتعني توحيد الأجزاء المكسورة (جبارة = توحيد) – حسب قاموس أوكسفورد.

الجبر هو "روح" الرياضيات الحديثة, وقد استخدمت الكلمة في كتاب "الجبر والمقابلة" للعالم أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي (حوالي سنة 825 ميلادية).

**معادلة:** هي صيغة تحدد علاقة بين مقدارين متصلين بالمساواة (=) – بحسب قاموس أوكسفورد أيضاً.

سنقوم بوصف أعمال عمر من خلال بعض المخطوطات المتاحة حول موضوع الجبر – والتي استخدمها Woepcke (1815) و Kasir(1931). في الصفحة التاسعة من منشوره عام 1931, ادعى كاسير بأن بالمخطوطة التي اعتمد عليها كانت من المكتبة الشخصية للبروفيسور دافيد يوجين سميث, من جامعة كولومبيا, و التي تشبه المخطوطة المتوفرة في مكتبة لايدين Leyden. في عام 1851 استخدم ووبيك مخطوطة لايدين في ترجمته. سنقوم بعرض أول صفحتين من المخطوط العربي و ما يقابله في الإنكليزية.

يجدر التنويه بأن أبسط المعادلات تدعى المعادلات الخطية ذات المتحول الواحد, وتكون على الشكل $2x-3=4x+2$ مثلاً, ولديها حل وحيد (في حالة المعادلة المثال يكون الحل هو x=-5/2 ) وتسمى خطية لأن أعلى قوة للمتحول x هي واحد.

النوع الثاني يدعى بالمعادلات التربيعية, مثال: $ax^2+bx+c=0$ حيث تكون a,b و c ثوابت, ويكون هنا أعلى قوة للمتحول x هي 2. هذه المعادلات تم حلها منذ زمن بعيد و لها جذران. في الواقع طريقة الحل التي نستخدمها اليوم هي من طرح العالم الهندي العظيم براهماغوبتا (في القرن السادس الميلادي) لحل وحيد و العالم بهاسكارا (في القرن الثاني عشر الميلادي) بحلين (راجع؛ Katz, 1998 ص.226-227) ويمكن أن يكون كلا الحلين إما حقيقين معاً أو عقديين معاً.

لاحظ بحالة المثال: $x^2=-1$ كلا الجذرين عقديين – أي جذور تربيعية للعدد السالب.

بتوسيع فكرة المعادلات السابقة تكون الصيغة العامة للمعادلات التكعيبية من الشكل:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

حيث a و b و c ثوابت. بالقيام بعملية تحويل خطي بسيطة $x = y - \frac{b}{3a}$ يتم تخفيضها إلى الشكل الأبسط (الشكل القانوني):

$$y^3 + py + q = 0$$

حيث p و q ثوابت. ولهذا النوع من المعادلات ثلاث حلول أحدها حقيقي على الأقل.

لقد اتبع عمر الطريقة الإغريقية بالإشارة إلى قوى المجاهيل في المعادلة، فاستخدم "الجذر" أو "الجانب"، "المربع"، "المكعب" و غيرها, فمثلا باتباع هذه الطريقة يمكن تمثيل العبارة: "معكبٌ و مربعٌ يساويان جذراً و عدداً" بالمعادلة التالية:

$$x^3 + ax^2 = bx + c$$

وتوافق العبارة:

$$(\text{مكعب}) + a\,(\text{مربع}) = b(\text{جذر}) + \text{عدد}$$

وقد اصطلح عمر الحل العددي على أنّه عدد كامل يحقق المعادلة. من ناحية أخرى، أصطلح الحل الهندسي على أنّه تحديد كمية قابلة للقياس غير معروفة عن طريق قطعة مستقيمة (كاسير, 1931, ص.23) .

مقالة

في الجبر والمقابلة

للحكيم الاوحد

ابى الفتح عمر بن ابراهيم

الخيامى

Figure 1a: Title page of Omar's Algebra in Arabic. (Leyden's manuscript)

**A Treatise on**
**Algebra with Comparative Studies**
**By the Iranian Scholar**
**Abol Fath Omar Khayyam**
**(the son of Ebrahim Khayyam)**

Figure 1b: Title page of Omar's Algebra, translated. (Leyden's manuscript)

رسالة الحكيم الفاضل

غياث الدين ابى الفتح عمر بن ابراهيم الخيامى النيسابورى (١)

قدّس الله روحه العزيز

فى البراهين على مسائل الجبر والمقابلة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والعاقبة للمتقين ولا عدوان الا على الظالمين
والصلوة على الانبيآء وخصوصا على محمد واله الطاهرين اجمعين (٢) ان
احد المعاني التعليميّة المحتاج اليها فى جزء الحكمة المعروف بالرياضي
هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعة لاستخراج المجهولات العددية

Figure 2a: Opening page of Omar's Algebra in Arabic. (Leyden's manuscript)

**A Treatise by the Iranian Scholar**
**Ghiasedin Abol Fath Omar Khayyam**
**(the son of Ebrahim Khayyam)**
**(Prayer to Omar Khayyam)**
**The solution to the problems of Algebra with Comparative Studies**
**In the name of God, gracious and merciful!**

**Praise be to God, lord of all Worlds, a happy end to those who are pious, and ill-will to none but the merciless. May blessings repose upon the prophets, especially Mohammed and all his holy descendants.**

**One of the branches of knowledge needed is that division of philosophy known as Algebra/Mathematics. Algebra deals with extracting unknown numerical variables.**

Figure 2b: Opening page of Omar's Algebra, translated. (Leyden's manuscript)

# تصنيف عمر

يعتبر عمر الخيام أول من قام بتصنيف المعادلات بشكل دقيق وقد قام بذلك من خلال التصنيف حسب درجة المعادلة.

أول مجموعة من المعادلات هي معادلات ثنائية الحد، وقد أطلق عليها اسم المعادلات البسيطة, وهي من الشكل:

$$1. a = x; 2. a = x^2; 3. a = x^3; 4. bx = x^2; 5. cx^2 = x^3; 6. bx = x^3.$$

المجموعة الثانية وقد دعاها باسم المعادلات المركبة تقسم إلى ثلاثية الحد (trianomial) و رباعية الحد (tetranomial).

أ. المعادلات التربيعية ثلاثية الحد:

$$7. x^2 + bx = a;\ \ 8. x^2 + a = bx;\ \ 9. bx + a = x^2\ .$$

ب. المعادلات التكعيبية ثلاثية الحد والتي يمكن تخفيضها إلى معادلات تربيعية:

$$10. x^3 + cx^2 = bx;\ \ 11.\ x^3 + bx = cx^2;\ \ 12.\ cx^2 + bx = x^3.$$

ج. المعادلات التكعيبية ثلاثية الحد:

$$13.\ x^3 + bx = a;\ \ 14.\ x^3 + a = bx;\ \ 15.\ bx + a = x^3;$$

$$16.\ x^3 + cx^2 = a;\ \ 17.\ x^3 + a = cx^2\ ; 18.\ cx^2 + a = x^3.$$

د. المعادلات رباعية الحد والتي يكون مجموع ثلاثة من حدودها مساوياً للحد الرابع:

$$19. x^3 + cx^2 + bx = a;\ \ 20.\ x^3 + cx^2 + a = bx;$$

$$21.\ x^3 + bx + a = cx^2; 22.\ cx^2 + bx + a = x^3.$$

ه. المعادلات رباعية الحد والتي يكون مجموع حدين من حدودها مساوياً لمجموع الحدين الآخرين:

$$23.\ x^3 + cx^2 = bx + a;\ \ 24.\ x^3 + bx = cx^2 + a; 25.\ x^3 + a = cx^2 + bx.$$

وقد أعطى عمر التواريخ التي كانت قد حلت بها بعض المعادلات ووصف طريقته في حلها اعتمادا على هذه التصنيفات الخمسة والعشرون. كما قد لاحظتم تشابه بعض هذه المعادلات جبرياً إلا أنّها مختلفة عن بعضها هندسياً.

# حلول عمر

يمكن وصف طريقة عمر في حل المعادلات بمفردات عصرنا الحاضر بالخطوات التالية:

1- لتكن $x^3 + px = q\ , p, q > 0$ هي الصيغة القانونية للمعادلة العامة, و لنعرف:

2- $y = (p)^{-\frac{1}{2}}x^2$ قطعاً مكافئاً. يمكننا الآن كتابة (1) بعد ضربه بـ $x$:

$$x^4 + px^2 = qx$$

أو بـ (2) لنحصل على:

$$py^2 + px^2 = qx$$

والتي هي:

$$\left(x - \frac{q}{2p}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{q}{2p}\right)^2 \quad -3$$

وهي دائرة مركزها يقطع على النقطة $(\frac{q}{2p}, 0)$ ونصف قطرها هو $\frac{q}{2p}$ أو قطرها $q/p$ . ويكون الجذر الموجب للتكعيبية المعطاة في (1) هو الإحداثي السيني لتقاطع الدائرة (3) و القطع المكافئ المعطى في (2)، وسنشرح البنية الهندسية بشكل كامل في الأسفل.

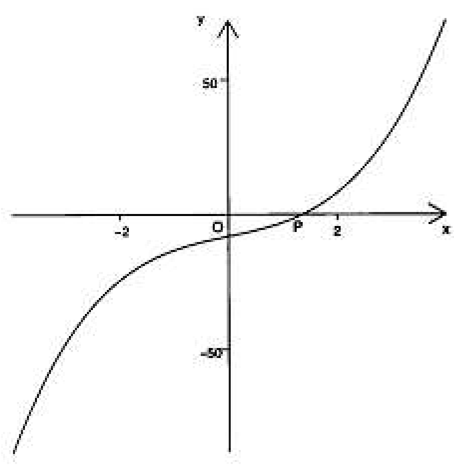
لنأخذ بعين الاعتبار معادلة تكعيبية محددة بحيث يكون $p = 4$ و $q = 8$ , ويكون القطع المكافئ $y = x^2/2$ ومركز الدائرة في النقطة (1,0) و نصف قطرها يساوي 1.

$$x^3 + 4x - 8 = 0$$

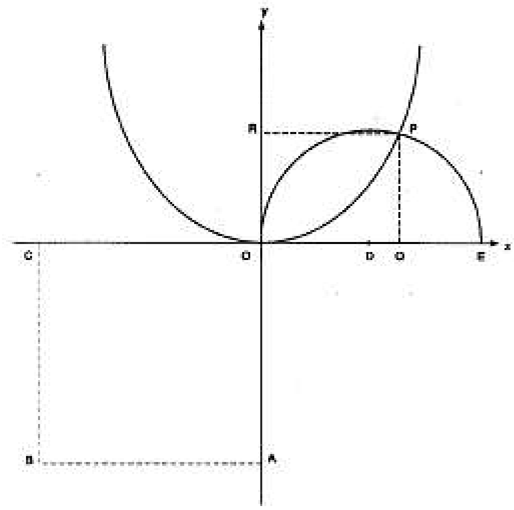
ويكون الجدر الموجب $x = 1.365$ حلاً لها. الطريقة الهندسية الحديثة تكون برسم التابع $y = x^3 + 4x - 8$ (في الشكل التالي) وملاحظة نقطة التقاطع مع محور السينات. في هذه الحالة، يوجد جذر حقيقي وحيد (هو OP في الشكل في الأسفل) و الجذران الآخران عقديان وذلك بسبب عدم وجود نقاط تقاطع إضافية مع محور السينات.

طبعاً طريقة عمر كانت هندسية، والمعادلة التكعيبية كانت معادلة بين مقادير جامدة فـ x ترمز إلى حرف المكعب و p تكون مساحة $(p < 0)$ والتي يمكن التعبير عنها كمربع هندسياً وتكون q أيضاً مقدار جامد (solids ؟).

سنقوم بوصف البنية الهندسية باستخدام (2) و (3). لنرسم مربعاً مساحته $p$ ويكون طول كل حرف من حروفه هو $\sqrt{p}$ و ليكون OA في الشكل. لنرسم عموداً على OA في O ولنرسم دائرة قطرها q/p بجانب OE ومركزها D. لنأخذ O كقمة, و OR محور، لنرسم القطع المكافئ بقطر OA. (وقد تم تعريف القطع المكافئ في حينها باستخدام تعريف أبولونيوس (210 قبل الميلاد)، راجع (كاتز 1998, ص. 119-120). من نقطة التقاطع بين القطع المكافئ و الدائرة P، لنرسم عمود على OE ولتكن Q نهاية العمود، و يكون الطول OQ هو الحل المنشود. يرجى الملاحظة بأنّ تعليم المحاور هنا جاء لمساعد القارئ المعاصر وليس له أي علاقة بالإنشاء الهندسي.




المنحني $y = x^3 + 4x - 8$ بالشكل المعاصر – ويكون الطول $OQ$ هو الحل الحقيقي للمعادلة الصفرية للمنحني (بإعطاء $y = 0$)




طريقة عمر في حال المعادلة التكعيبية $x^3 + 4x - 8 = 0$ ؛ المقطع $OQ$ يعطي الجذر الموجب. راجع النص للحصول على الطريقة التي تم إنشاء المربع ABCD بها بالنسبة إلى نصف الدائرة والقطع المكافئ. ويكون حل المعادلة هو طول OQ.

تجدر الملاحظة بأنّ صيغة كاردانو (1545) المعطاة في أطروحته في *Ars Magna*، تعطي بطريقة دقيقة الجذر الموجب للحالة كما يلي:

$$\left[\frac{q}{2}+\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[\frac{q}{2}-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

أمر آخر، لاحظ وجود ثلاثة حلول للمكعبة و جميع هذه الحلول الثلاثة يمكن أن تكون موجبة. أحد المعادلات التي درسها عمر (كاسير 1931 ص. 92-93):

$$x^3 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 10x^2$$

لها حلين موجبين وآخر سالب. وهي $x = 2,\ \ x = 4 \pm \frac{1}{2}\sqrt{74}$ , و هكذا في الشكل التالي أوجدنا 3 نقاط تقاطع مع محور السينات وهي P و Q و R من المنحني $y = x^3 - 10x^2 + 13\frac{1}{2}x + 5 = 0$. وقد تمكن عمر غالباً من إيجاد حل موجب واحد فقط باستخدام طريقته في الإنشاء الهندسي.

على العموم، طريقة عمر كانت ستجد حلا أو حلين موجبين عبر تقاطعين مخروطيين. وقد تعامل مع جميع الحالات الخمسة والعشرين التي عرضناها سابقاً بشكل منهجي. ووبيك (1951) أعطى الزوج المناسب من *(المخاريط)* التي تقود لعدة حالات من المعادلات التكعيبية التي ذكرناها سلفاً. (راجع أيضاً؛ كاسير 1931. ص. 35-36). وهكذا تفحص ووبيك المسألة المعاكسة.

# نادي عمر الخيام

من الجدير بالذكر أنّ العديد من المخطوطات والترجمات و المؤلفات و المحاكاة الساخرة و آثار لمواد متعلقة بعمر الخيام حتى عام 1928 وفرت من قبل Potter (1929)؛ عدد المواد المتوفرة أثر من 1300! بعد ذلك أعطى Halbach(1975) بيبلوغرافيا سطحية أغلبها حول ربيعيات الخيام. في الواقع قدم William Edward Story (1918) محاضرة عن "عمر الخيام عالم الرياضيات" في نادي عمر الخيام الأمريكي وقد تم تحديد توزيع النسخ إلى 200 نسخة فقط, قد أُغلق نادي عمر الخيام الأمريكي في نهاية ثلاثينيات القرن العشرين.